

**MEXANİKA**

УДК 539.2-18

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОМИНАНТНЫХ ЧАСТОТ НА ОСНОВЕ  
ОБОБЩЕННОЙ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ****М.М.ТАГИЕВ***Бакинский Государственный Университет  
mexanika.bsu.az@mail.ru*

*В статье рассматривается определение доминантных частот на основе обобщенной реологической модели, включающей массу частиц. Изучено действие различных параметров на доминантных частот.*

**Ключевые слова:** волны, жидкость, скорость волны, затухание

Проблема распространения нелинейных волн в насыщенных пористых средах представляет интерес в нескольких аспектах. В теоретическом аспекте это задача математической физики, а в прикладном-необходимый этап для расчета системы, подверженной динамическому воздействию. В [9] исходя из общих уравнений механики сплошной среды построены нелинейные математические модели для описания волновых процессов деформации. Процесс сочетания диссипативных и дисперсионных эффектов с учетом нелинейной характеристики среды приведен к уравнению Кортевега-де Фриза-Бюргера.

Теория распространения ударных радиоволн в нелинейных линиях и электромагнитных волн в нелинейных средах в отсутствии дисперсии берет свое начало с работ [2, 10]. В [9] проанализировано влияние затухания (диссипации) на эволюцию фронта ударной волны, а в [2] показано существование ударных волн в затухающих средах. В различных областях науки нелинейные волновые уравнения описывают конкретные физические процессы, отличающиеся по своей специфике, следует отметить, что решения этих уравнений с математической точки зрения являются

идентичными. Поэтому сущность теории волн заключается в построении уравнений переноса и разъяснении секундарных эффектов, связанных с изменениями в формах и амплитудах волн в средах со сложными свойствами [1, 9].

**Нелинейное уравнение двухфазных сред.** Переходя к исследованию распространения динамических волн в двухфазных (жидкость-твердые частицы) средах примем, что осредненное напряжение в них обусловлено напряжением несущей фазы, а твердая фаза состоит из одной или нескольких масс, которая моделируется упругими и вязкими элементами [4].

Система уравнений, описывающая одномерную динамику дисперсных двухфазных сред включает в себя баланс массы и импульса каждой фазы

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i \vartheta_i)}{\partial x} = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i \vartheta_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i \vartheta_i \vartheta_i)}{\partial x} = \delta_{1i} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial P}{\partial x} + (-1)^i R_{12}. \quad (1.2)$$

Связь между напряжениями и деформацией твердой фазы примем в виде [1–3]

$$\left( b_0 + \sum_{l=1}^m b_l \frac{D^l}{Dt^l} \right) (\sigma + \gamma P) = \left( a_0 + \sum_{l=1}^n a_l \frac{D^l}{Dt^l} \right) e_1. \quad (1.3)$$

Продольная деформация  $e_1$  и скорость твердой частицы  $\vartheta_1$  связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial e_1 \vartheta_1}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.1)-(1.4) замыкается термодинамическими уравнениями состояний фаз

$$\rho_1 = \rho_1(\sigma, P), \quad \rho_2 = \rho_2(P). \quad (1.5)$$

Параметры твердой и жидкой фаз обозначены здесь, соответственно, индексами '1' и '2'.  $\alpha_i, \rho_i, v_i, \sigma, p$  - соответственно, объемная концентрация, истинная плотность, скорость и напряжение фаз и давление в жидкой фазе;  $\sigma = \alpha_1(\Gamma - P)$ ,  $\Gamma$  - истинное напряжение в твердой фазе,  $\delta_{1i}$  - единичный тензор,  $\alpha_1^{(0)}$  - начальное значение  $\alpha_1$ ;  $\gamma = \beta_1 K$ ;  $\beta_1$  и  $K$  - коэффициенты изотермической сжимаемости твердых частиц и всей твердой фазы в целом.

Постоянные коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_m$ ;  $a_0, a_1, \dots, a_n$  определяются из конкретных упруго-вязких моделей [1–3].

Силу межфазного сопротивления можно задать в виде [4].

$$R_{12} = (\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1) f(|\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1|) = K_v (\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1) + K_v b (\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1) |\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1|. \quad (1.6)$$

Области справедливости закона (1.6) и линейной связи (когда  $b = 0$ ) определяются внутренним числом Рейнольдса

$$Re = ul\rho_2 / \nu = (\rho_2 / \nu) |\bar{\mathcal{G}}_2 - \bar{\mathcal{G}}_1| \sqrt{k / \alpha_2}$$

и его критическим значением  $Re_{kp}$ , после которого линейная связь нарушается, где  $\nu$  – динамическая вязкость жидкости,  $k$  – коэффициент пористости пористой среды.

Процесс, описываемый уравнениями (1.1)-(1.6) соответствует изотермическому взаимопроникающему движению сплошных сред. Выводим эволюционное уравнение волновой динамики. Считаем, что форма переменных функций медленно изменяется с расстоянием от входа [7], т.е. изменяем масштаб длины и времени, вводя малый параметр

$$\alpha_i = \alpha_i(\eta x, t - c^{-1}x), \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(\eta x, t - c^{-1}x). \quad (1.7)$$

Воспользуясь изменением масштаба длины и времени

$$X = \eta x, \quad \tau = t - c^{-1}x. \quad (1.8)$$

Пользуясь (1.8), записывая систему уравнений (1.1) (1.6) в новых переменных и решив полученную систему уравнений в первом приближении получим уравнение дисперсии

$$\begin{aligned} & \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} b_0 [\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)} (L_1 - D_1 \gamma) + \rho_1^{(0)} \alpha_2^{(0)} B_1] c^4 + \\ & + [\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)} (\alpha_1^{(0)} a_0 D_1 - a_0 L_1 + \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} b_0 - \gamma \rho_1^{(0)} b_0) + \\ & + \alpha_2^{(0)} \rho_1^{(0)} (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} b_0 - a_0 B_1)] c^2 - \alpha_2^{(0)} \rho_1^{(0)} a_0 = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

а во- втором приближении получим уравнение эволюции, описывающее распространение нелинейных волн в двухфазных средах [3]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial T} - R_2 \mathcal{G} \left( 1 + \frac{b}{|R_1|} \left| 1 - \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - a_0 / (b_0 c^2)}{\rho_1^{(0)} (\alpha_1^{(0)} - \gamma)} \right| |\mathcal{G}| \right) + \\ & R_3 \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} A_{l+1} \frac{\partial^{l+1} \mathcal{G}}{\partial T^{l+1}} = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$A_{l+1} = \Gamma_{m-l} \frac{a_0 b_l}{b_0} - \Gamma_{n-l} a_l, \quad \Gamma_{n-l} = 1, n \geq l, \quad \Gamma_{n-l} = 0, n < l$$

$$\begin{aligned} R_1 = & \frac{\alpha_2^{(0)} (1 + c^2 B_1)}{c \rho_2^{(0)} (\alpha_1^{(0)} - \gamma)^2} (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2})^2 \cdot \left[ (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2}) \times \right. \\ & \left. \times (c^{-2} \rho_1^{(0)} - 2 \rho_2^{(0)} L_1 + 2 \rho_1^{(0)} B_1) + \alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)} (2 \rho_1^{(0)} \gamma - \frac{3 a_0}{b_0 c^2}) D_1 - c^{-2} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_0 \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{b_0 c^3} (2\alpha_1^{(0)} D_1 + c^{-2}) + 2c^{-3} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} \times \\
& \times (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2}) + 2c^{-3} \cdot \frac{\alpha_2^{(0)} \rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)} (\alpha_1^{(0)} - \gamma)^2} (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2})^3 + \\
& + \frac{2c \alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{(\alpha_1^{(0)} - \gamma)^2} (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2}) \left[ \alpha_1^{(0)} \alpha_1^{(0)} (\rho_1^{(0)} \gamma - \frac{a_0}{b_0 c^2})^2 D_2 - \right. \\
& - \alpha_1^{(0)} (\rho_1^{(0)} \gamma - \frac{a_0}{b_0 c^2}) (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2}) D_L + \\
& \left. + (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2})^2 L_2 + \frac{\alpha_2^{(0)} \rho_1^{(0)}}{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)}} (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2})^2 B_2 \right] / \Delta, \\
R_2 = & K_\nu \rho_2^{(0)} \left[ \frac{a_0}{b_0^2 c} (\alpha_1^{(0)} D_1 + c^{-2} \rho_1^{(0)} / \rho_2^{(0)}) + c^{-2} \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} (1 - \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}) \times \right. \\
& \left. \times (1 - \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - a_0 / (b_0 c^2)}{\rho_1^{(0)} (\alpha_1^{(0)} - \gamma)}) \right] / \Delta; \quad R_3 = \frac{\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{b_0 c^2} (\alpha_1^{(0)} D_1 + c^{-2}) / \Delta, \\
\Delta = & 2c \alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} \left[ \alpha_1^{(0)} (\frac{a_0}{b_0 c^2} D_1 + c^{-2} \rho_1^{(0)}) + \frac{c^{-2} \alpha_2^{(0)}}{\alpha_1^{(0)} \rho_2^{(0)} (\alpha_1^{(0)} - \gamma)} (\alpha_1^{(0)} \rho_1^{(0)} - \frac{a_0}{b_0 c^2})^2 \right].
\end{aligned}$$

Уравнение (1.9) имеет пару корней, соответствующих распространению продольных волн в твердой и жидкой фазах [5]. В результате пришли к модифицированному уравнению в частных производных высокого порядка с нелинейностью Кортвега-де Фриза Бюргера, форма которой показывает на учет вязкой диссипации, дисперсии и межфазной диссипации сопротивления. Значения  $m$  и  $n$  зависят от количества вязких и упругих элементов, а также их формы присоединения в феноменологической связи (1.3). Отметим, что в (1.10) варьируя числами  $m, n$  и аппроксимируя функцию  $f$  на многочлен, приходим к уравнениям, характеризующих различные физические процессы.

2. Определение доминантных частот на основе обобщенной реологической модели, включающих массу частиц.

Можно показать, что случай  $n=3, m=5$  соответствует реологическому закону (1.3), показанному на рис.1

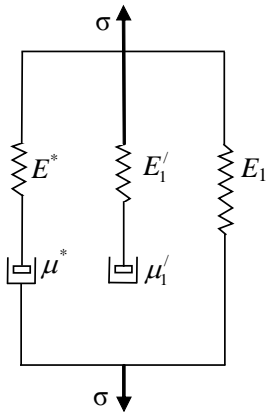
$$b_0 = 1, b_1 = \theta + \theta_*, b_2 = \left( \theta \theta_* + \frac{M_1}{E_1} \right), b_3 = \theta \frac{M_1}{E_1}, a_0 = E_2,$$

$$a_1 = (E_1 + E_2)\theta + (E_1 + E_*)\theta_*,$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= E_2 \left( \frac{M_1}{E_1} + \frac{M_2}{E_2} + \theta\theta_* \right) + (E_1 + E_2)\theta\theta_*, \\
a_3 &= (M_1 + M_2)\theta + \left( M_1 + M_2 \frac{E_2 + E_*}{E_1} \right) \theta_*, \\
a_4 &= \frac{M_1 \cdot M_2}{E_1} + M_1\theta\theta_*, \\
a_5 &= \frac{M_1 M_2}{E_1} \theta_*, \quad \theta = \frac{\mu}{E_1}, \quad \theta_* = \frac{\mu_*}{E_*}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Из выражений  $A_{i+1}$  следует

$$\begin{aligned}
A_2 &= -E_1\theta - E_*\theta_*, \\
A_3 &= -(E_1 + E_*)\theta\theta_* - M_2, \quad A_4 = \frac{E_2}{E_1} M_1\theta - \\
&\quad - (M_1 + M_2)\theta + \left( M_1 + M_2 \frac{E_2 + E_*}{E_1} \right) \theta_*. \\
A_3 &= -(E_1 + E_*)\theta\theta_* - M_2, \quad A_4 = \frac{E_2}{E_1} M_1\theta - \\
&\quad - (M_1 + M_2)\theta + \left( M_1 + M_2 \frac{E_2 + E_*}{E_1} \right) \theta_*. \\
A_5 &= -M_1 \left( \theta\theta_* + \frac{M_2}{E_1} \right), \quad A_6 = -\frac{M_1 M_2}{E_1} \theta_*.
\end{aligned} \tag{2.2}$$



**Рис.1.** Обобщенная реологическая модель, включающая массу частиц

Возьмем стандартные гармонические возмущения [1-3].

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \exp(i(\omega T - kx)). \tag{2.3}$$

Тогда имеем дисперсионное соотношение

$$-ik = R_2 k + R_3(A_2 \omega^2 - A_4 \omega^4 + A_6 \omega^6) + iR_3(A_3 \omega^3 - A_5 \omega^5) \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что экспоненциальный рост амплитуд волн (неустойчивость колебаний) при  $R_2 k + R_3(A_2 \omega^2 - A_4 \omega^4 + A_6 \omega^6) > 0$  возникает в определенном интервале спектра колебаний. Частоты таких колебаний называются доминантными [4-6].

Волны будут затухать, если  $\text{Re}(-ik) > 0$ , но в линейном приближении при  $\text{Re}(-ik) < 0$  их амплитуды растут со временем. Однако подобный рост амплитуды ограничивается с нелинейными членами уравнения (1.10).

Интервал соответствующей неустойчивости лежит между корнями уравнения

$$f(\omega) = R_2 k + R_3(A_2 \omega^2 - A_4 \omega^4 + A_6 \omega^6) = 0.$$

Интервалы изменения доминантных частот иллюстрированы для известняка с водой (рис.2):

$\beta_1 = 1,35 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/кг,  $\rho_1^{(0)} = 260$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>4</sup>,  $\nu = 0,2$ ,  $E_2 = 7 \cdot 10^8$  кг/м<sup>2</sup>,  $E_* = 10^7$  кг/м<sup>2</sup>,  $\theta_* = 10^{-4}$  сек,  $\theta = 10^{-3}$  сек,  $\alpha_2^{(0)} = 0,05$ ,  $K_\nu = 1$  (кг·сек)/м<sup>4</sup>,  $M_1 = 10^8$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $M_2 = 5 \cdot 10^7$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $C_1 = 3511$  м/сек,  $C_2 = 827$  м/сек.

Песчаника с водой (рис.3):

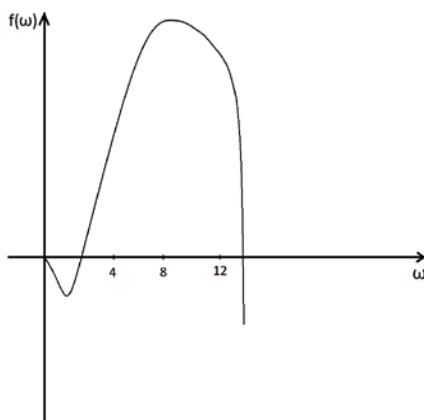
$\beta_1 = 3 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/кг,  $\rho_1^{(0)} = 262$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>4</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $E_2 = 10^9$  кг/м<sup>2</sup>,  $E_* = 10^7$  кг/м<sup>2</sup>,  $\theta_* = 10^{-4}$  сек,  $\theta = 10^{-3}$  сек,  $\alpha_2^{(0)} = 0,16$ ,  $K_\nu = 0,2$  (кг·сек)/м<sup>4</sup>,  $M_1 = 10^8$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $M_2 = 5 \cdot 10^7$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $C_1 = 2313$  м/сек,  $C_2 = 1053$  м/сек.

Известняка с газом (рис.4):

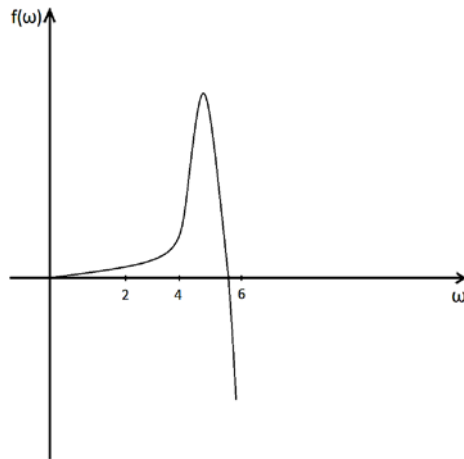
$\beta_2 = 0,8$  м<sup>2</sup>/кг,  $\rho_2^{(0)} = 1$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>4</sup>,  $K_\nu = 0,1$  (кг·сек)/м<sup>4</sup>,  $M_1 = 10^8$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $M_2 = 5 \cdot 10^7$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $C_2 = 353$  м/сек.

Песчаника с газом (рис.5):

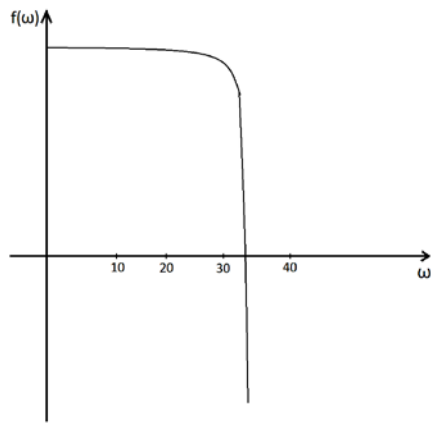
$\beta_2 = 0,8$  м<sup>2</sup>/кг,  $\rho_2^{(0)} = 1$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>4</sup>,  $K_\nu = 0,2$  (кг·сек)/м<sup>4</sup>,  $M_1 = 10^8$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $M_2 = 5 \cdot 10^7$  (кг·сек<sup>2</sup>)/м<sup>2</sup>,  $C_2 = 353$  м/сек.



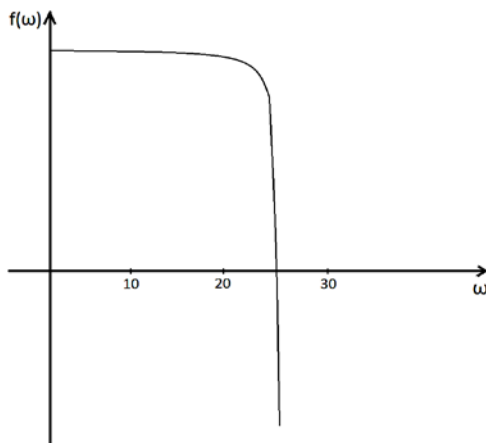
**Рис.2** Интервал уселения сейсмических колебаний в известняковом пласте, насыщенном водой.



**Рис.3** Интервал уселения сейсмических колебаний в песчаном пласте, насыщенном водой.



**Рис.4** Интервал уселения сейсмических колебаний в известняковом пласте, насыщенном водой.



**Рис.5** Интервал уселения сейсмических колебаний в песчаном пласте, насыщенном газом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ramazanov T.K. Non Linear Waves in Suspension with Antisymmetrical Stresses. 15<sup>th</sup> IMACS, Berlin, August, 1997, V.3. Computation physics, Chemistry and Biolog. P.387-390.
2. Ramazanov T.K., Kurbanov A.I., The Numerical Modeling of nonlinear Wave Processes in Two-Phase Systems. Proc. of the 26<sup>th</sup> Annual Iranian Mathematics Conference Kerman, 1995, p. 341-346.
3. Ramazanov T.K., Тагиев М.М. Одномерная динамика нелинейных волн в монодисперсных суспензиях. БГУ «Вестник», 1999, №1, с. 144-152.
4. Николаевский В.Н. Нелинейные волны в грунтах и трещиноватых горных породах // Физ.-техн. пробл. разработки полезных ископаемых, 1988, №6, с.31-38.
5. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996, 448 с.
6. Immich H. Impulsive Motion of Suspensions Effect of Antisymmetric Stresses and Particle Rotation. Int.J. Multiphase Flow, 1980, v. 6, p, 441-471.
7. Хорошун Р.В. К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях // Радиотехника и электроника, 1961, №6, с. 124-132.
8. Lax P.D. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves-Communes. Pure and Appl. Math. 1968, v.21, p.467-490.
9. Бхатнагар П.Л. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983, 136 с.
10. Энгельбрехт Ю.К., Нигуль Ю.К. Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981, с.256.

#### ÜMUMİLƏŞMİŞ REOLOJİ MODEL ƏSASINDA DOMİNANT TEZLİYİN TƏYİNİ

M.M.TAĞIYEV

#### XÜLASƏ

Məqalədə hissəcik kütləsi daxil olan ümumiləşmiş reoloji model əsasında dominant tezliyin təyininə baxılmış və müxtəlif parametrlərin dominant tezliyə təsiri öyrənilmişdir.

**Açar sözlər:** dalğa, maye, dalğa sürəti, sönmə

#### DETERMINING THE DOMINANT FREQUENCY ON THE BASIS OF GENERALIZED RHEOLOGICAL MODEL

M.M.TAGIYEV

#### SUMMARY

The article studies the dominant frequency on the basis of the generalized rheological model, which includes a mass of particles and the effects of various parameters on the dominant frequency.

**Key words:** wave, fluid, velocity of the waves, attenuation

*Postupila v redakciju: 10.11.2014 z.*

*Podpisano k печати: 13.02.2015 z.*